DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

1986

MATHEMATIQUES

1ère épreuve commune aux 3 options M, P et TA.

Durée : 4 heures.

PARTIE I :

On considère la fonction de la variable réelle : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f, D.
2) Démontrer que f est décroissante sur D.
3) Démontrer que, $\forall x \in D$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\, dt \leqslant \frac{1}{n^x}$$

En déduire que, $\forall x \in D$ : $\frac{1}{x-1} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$ ,

Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \longrightarrow 1^+$ .

4) Calculer les limites de f aux bornes de D.
5) Déterminer a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 (at^2 + bt) \cos(n\pi t)\, dt = \frac{1}{n^2}$$

En déduire la valeur de f(2),

( On pourra utiliser, après l'avoir démontré, le résultat suivant :

si $h \in \mathcal{C}^1([0,1])$ , alors $\lim_{m \longrightarrow +\infty} \int_0^1 h(t) \sin(m\pi t)\, dt = 0$ .)

6) On considère les suites :

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \quad \text{et} \quad v_n(x) = u_n(x) + \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{n^{x-1}} .$$

Démontrer que les suites $u_n(x)$ et $v_n(x)$ sont adjacentes.

En déduire que : $\frac{28567}{24000} < f(3) < \frac{28567}{24000} + \frac{1}{72}$ .

7) Soit $a \in D$. Démontrer que :

$$\forall x \geqslant a, \qquad 0 < f(x) - u_n(x) < \frac{1}{(a-1)n^{a-1}} .$$

En déduire que f est continue sur D.

8) Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

PARTIE II :

On considère la fonction de la variable réelle :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} .$$

1) Déterminer son ensemble de définition E .

2) Soit $a \in E$ . On pose : $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$ .

Prouver que, $\forall x \geqslant a$ : $\left| g(x) - s_n(x) \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}$ .

En déduire que g est continue sur E.

3) Démontrer que, $\forall x \in D$ :

$$g(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) . f(x).$$

4) Déduire de ce qui précède la valeur de

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots .$$

PARTIE III :

1) Démontrer que l'équation : ( E ) : $2 - x - 2e^{-x} = 0$
admet deux racines $\alpha$ et $\beta$ dans $\mathbb{R}$ .

Tournez la page S.V.P.

2) Soit $\alpha$ la racine strictement positive de ( E ) . On considère la suite $w_n$ définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = 2\,(1 - e^{-w_n}) \end{cases} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \ .$$

Démontrer que la suite $w_n$ converge vers $\alpha$ .

3) Démontrer que , $\forall\, n \in \mathbb{N}$ :

$$| w_n - \alpha | \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n \ .$$

En déduire une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-2}$ près.

4) Tracer avec précision, sur papier millimétré, dans un repère orthonormé (unité : 2 cm), la représentation graphique de :

$$h(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$$

5) Etablir la convergence des intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} h(t)\,dt \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{+\infty} h(t)\,e^{-nt}\,dt, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* .$$

Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

6) Démontrer que, $\forall\, t > 0$

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = 1 + e^{-t} + \ldots + e^{-(n-1)t} + \frac{e^{-nt}}{1-e^{-t}} \ .$$

En déduire que $I = 2\,.\,f(3)$ .

7) On pose : $H(x) = \int_0^x \frac{t^2}{e^t - 1}\,dt$

Déterminer l'ensemble de définition de H .

Déterminer une valeur approchée de $H(1,6)$ et de $H(-1)$ par la méthode des trapèzes utilisée avec un pas de $0,2$ .

8) Tracer la représentation graphique de H dans le même repère que h.

9) Déterminer la solution $y$ de l'équation différentielle :

$$(e^x - 1)\,(y' + y) = x^2 e^{-x}$$

qui vérifie la condition initiale : $y(0) = 0$.

10) Tracer la représentation graphique de $y$ dans le même repère que h et H (on déterminera graphiquement le maximum local de $y$ ).

PARTIE IV :

On considère la suite des nombres premiers :

$p_1 = 2$ , $p_2 = 3$ , $p_3 = 5$ , ...., $p_n$ , ....

1) Soit $x > 1$ . Démontrer que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k^x}$ est convergente.

2) Soit $K_n$ l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, qui ne sont multiples ni de 2, ni de 3, ni de $p_n$. On pose :

$$f_n(x) = 1 + \sum_{k \in K_n} \frac{1}{k^x} \qquad (x > 1).$$

Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ :

$$f(x).\,(1 - \tfrac{1}{2^x})\,(1 - \tfrac{1}{3^x}) \ldots (1 - \tfrac{1}{p_n^x}) = f_n(x)$$

3) Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$ . En déduire la limite de la suite :

$$\Gamma_n(x) = (1 - \tfrac{1}{2^x})\,(1 - \tfrac{1}{3^x}) \ldots (1 - \tfrac{1}{p_n^x})$$

4) Démontrer que : $\forall\, x > 1$ :

$$\ln\left[f(x)\right] \leqslant 2 \ln 2 . \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k^x}$$

5) Démontrer que la série des inverses des nombres premiers :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{p_n} + \ldots\ldots \quad \text{est divergente.}$$